

Análise Matemática I-E

2009/10

Programa

- ① Noções Topológicas em $\mathbb{R}$
- ② Indução Matemática
- ③ Sucessões de Números Reais
- ④ Funções Reais de Variável Real: Limites, Continuidade e Diferenciabilidade
- ⑤ Funções Reais de Variável Real: Primitivação
- ⑥ Funções Reais de Variável Real: Cálculo Integral
- ⑦ Integrais Impróprios

Referências Bibliográficas

- **Sebenta Adoptada**

Ana Alves de Sá e Bento Louro, Análise Matemática I, FCT-UNL, 2009 $\Rightarrow$ do primeiro semestre

- **Bibliografia Recomendada**

- Sebenta do professor José Maria Gomes (primeiro semestre).
- SWOKOWSKI, EARL W., Cálculo com geometria analítica, MacGraw-Hill, 1983.
- APOSTOL, T. - Calculus, Blaisdell, 1967.
- CAMPOS FERREIRA, J. - Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.
- STEWART, J. - Calculus, 3ª edição, Brooks/Cole Publishing Company, 1995.
- ANTON, BIVENS, DAVIS - Cálculo, 8ª edição, Bookman, 2007. (Versão portuguesa)

Regras de Avaliação

- São iguais às do primeiro semestre à **excepção** da época normal.
- Na data de época normal apenas se realizará a repetição dos testes!

Regras de Avaliação

- São iguais às do primeiro semestre à **excepção** da época normal.
- Na data de época normal apenas se realizará a repetição dos testes!

1. Noções topológicas em $\mathbb{R}$

Definição

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Chama-se **vizinhança** ε de a ao conjunto $V_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Definição

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e A um conjunto de números reais. Diz-se que:

- a é **interior** a A se existir uma vizinhança de a contida em A ;
- a é **fronteiro** a A se toda a vizinhança de a intersecta A e $\mathbb{R} \setminus A$;
- a é **exterior** a A se existir uma vizinhança de a contida em $\mathbb{R} \setminus A$.

Nota: Um ponto é exterior a A se, e só se, é interior a $\mathbb{R} \setminus A$.

Definição

O conjunto dos pontos interiores a A chama-se **interior** de A e representa-se por $\text{int}(A)$.

O conjunto dos pontos exteriores a A chama-se **exterior** de A e representa-se por $\text{ext}(A)$.

O conjunto dos pontos fronteiros a A chama-se **fronteira** de A e representa-se por $\text{fr}(A)$.

Nota: Qualquer que seja $A \subset \mathbb{R}$ tem-se:

- $\text{int}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$;
- $\text{int}(A) \cap \text{fr}(A) = \emptyset$;
- $\text{fr}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$;
- $\text{int}(A) \cup \text{fr}(A) \cup \text{ext}(A) = \mathbb{R}$.

Nota: Qualquer que seja $A \subset \mathbb{R}$ tem-se:

- $\text{int}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$;
- $\text{int}(A) \cap \text{fr}(A) = \emptyset$;
- $\text{fr}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$;
- $\text{int}(A) \cup \text{fr}(A) \cup \text{ext}(A) = \mathbb{R}$.

Nota: Qualquer que seja $A \subset \mathbb{R}$ tem-se:

- $\text{int}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$;
- $\text{int}(A) \cap \text{fr}(A) = \emptyset$;
- $\text{fr}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$;
- $\text{int}(A) \cup \text{fr}(A) \cup \text{ext}(A) = \mathbb{R}$.

Nota: Qualquer que seja $A \subset \mathbb{R}$ tem-se:

- $\text{int}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$;
- $\text{int}(A) \cap \text{fr}(A) = \emptyset$;
- $\text{fr}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$;
- $\text{int}(A) \cup \text{fr}(A) \cup \text{ext}(A) = \mathbb{R}$.

Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que A é **aberto** se $A = \text{int}(A)$.

Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Chama-se **fecho** ou **aderência** de A ao conjunto $\bar{A} = A \cup \text{fr}(A)$.

Diz-se que x é **aderente** a A se $x \in \bar{A}$.

Diz-se que A é **fechado** se $A = \bar{A}$.

Notas:

- Das definições, conclui-se facilmente que $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A)$.
- A é fechado se, e só se, $\text{fr}(A) \subset A$.
- A é fechado se, e só se, $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto, isto é,

$$\mathbb{R} \setminus A = \text{int}(\mathbb{R} \setminus A) = \text{ext}(A).$$

Notas:

- Das definições, conclui-se facilmente que $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A)$.
- A é fechado se, e só se, $\text{fr}(A) \subset A$.
- A é fechado se, e só se, $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto, isto é,

$$\mathbb{R} \setminus A = \text{int}(\mathbb{R} \setminus A) = \text{ext}(A).$$

Notas:

- Das definições, conclui-se facilmente que $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A)$.
- A é fechado se, e só se, $\text{fr}(A) \subset A$.
- A é fechado se, e só se, $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto, isto é,

$$\mathbb{R} \setminus A = \text{int}(\mathbb{R} \setminus A) = \text{ext}(A).$$

Definição

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Diz-se que a é **ponto de acumulação de A** se toda a vizinhança de a intersecta $A \setminus \{a\}$.

Ao conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se **derivado de A** .

Diz-se que a é **ponto isolado de A** se $a \in A$ e existe uma vizinhança de a que não intersecta $A \setminus \{a\}$.

Nota: Se $a \in \text{int}(A)$, então a é ponto de acumulação de A .

Definição

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que:

- x é **majorante** de A se $x \geq a, \forall a \in A$;
- x é **minorante** de A se $x \leq a, \forall a \in A$.

Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Diz-se que A é **majorado** se admitir majorantes.

Diz-se que A é **minorado** se admitir minorantes.

Se A for majorado e minorado, diz-se que A é **limitado**.

Teorema

A é limitado se, e só se, $\exists M > 0, \forall x \in A, |x| \leq M$.

Definição

Seja A um subconjunto majorado de $\mathbb{R}$.

Diz-se que β é o **supremo** de A se β for o menor dos majorantes de A . Escreve-se $\beta = \sup(A)$

Se o supremo de A pertencer a A , diz-se que é o **máximo** de A . Escreve-se $\beta = \max(A)$.

Definição

Seja A um subconjunto minorado de $\mathbb{R}$.

Diz-se que α é o **ínfimo** de A se α for o maior dos minorantes de A . Escreve-se $\alpha = \inf(A)$

Se o ínfimo de A pertencer a A , diz-se que é o **mínimo** de A . Escreve-se $\alpha = \min(A)$.

Teorema

Em $\mathbb{R}$, todo o conjunto majorado tem supremo e todo o conjunto minorado tem ínfimo.

Teorema

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Então $\beta = \sup(A)$ se, e só se, β é majorante de A e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > \beta - \varepsilon.$$

Analogamente, $\alpha = \inf(A)$ se, e só se, α é minorante de A e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < \alpha + \varepsilon.$$

Exercícios

1 Considere o conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{2-x} \geq 1 \right\}$.

- 1 Mostre que $A =]-\infty, -2[\cup [1, 2[$.
- 2 Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap]-2, \infty[$.

exercício retirado de 2º exame de Análise Matemática 1, IST, 2004/05

2 Considere o conjunto

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- 1 Indique o conjunto dos majorantes, minorantes, o supremo, ínfimo, máximo, mínimo e derivado de A .
- 2 O conjunto A é aberto ou fechado?

exercício retirado do Exame de Análise Matemática 1, ISEL, 2003/04

Exercícios

1 Considere o conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{2-x} \geq 1 \right\}$.

- 1 Mostre que $A =]-\infty, -2[\cup [1, 2[$.
- 2 Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap]-2, \infty[$.

exercício retirado de 2º exame de Análise Matemática 1, IST, 2004/05

2 Considere o conjunto

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- 1 Indique o conjunto dos majorantes, minorantes, o supremo, ínfimo, máximo, mínimo e derivado de A .
- 2 O conjunto A é aberto ou fechado?

exercício retirado do Exame de Análise Matemática 1, ISEL, 2003/04

Princípio de Indução Matemática

Uma propriedade é válida para todos os números naturais se:

- 1 A propriedade é válida para $n = 1$,
- 2 Para todo o n natural, se a propriedade é válida para n , então ela é válida para $n + 1$.